ANNEXE 1
ALPHABET GREC

Prononciation	Majuscule	Miniscule
Alpha	Α	α
Bêta	Β	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	Ε	ε
dzêta	Ζ	ζ
éta	Η	η
thêta	Θ	θ
iota	Ι	ι
kappa	Κ	κ
lambda	Λ	λ
mu	Μ	μ
nu	Ν	ν
xi	Ξ	ξ
oméga	Ω	ω
omicron	Ο	ο
pi	Π	π
rhô	Ρ	ρ
sigma	Σ	σ
tau	Τ	τ
upsilon	Υ	υ
phi	Φ	φ
Khi	Χ	χ
Psi	Ψ	ψ

ANNEXE2

GRADIENT, DIVERGENCE, ROTATIONNEL ET LAPLACIEN DANS DIFFERENTES COORDONNEES (cartésiennes, cylindriques et sphériques).

Soit :

F : **Une fonction scalaire**

$\vec{V}$: **Une fonction vectorielle**

Gradient d'un scalaire en coordonnées :

Cartésiennes : $F = F(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}F = \left[\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}\right]$$

Cylindriques : $F = F(r,\theta,z)$

$$\vec{\nabla}F = \left[\frac{\partial F}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial F}{\partial z}\overrightarrow{u_z}\right]$$

Sphériques : $F = F(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{grad}F = \vec{\nabla}F = \left[\frac{\partial F}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}\right]$$

Divergence d'un vecteur en coordonnées :

Cartésiennes : $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z)$, $V_x = V_x(x,y,z), V_y = V_y(x,y,z), V_z = V_z(x,y,z)$

$$\overrightarrow{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Cylindriques : $\vec{V} = \vec{V}(r,\theta,z)$, $V_r = V_r(r,\theta,z), V_\theta = V_\theta(r,\theta,z), V_z = V_z(r,\theta,z)$

$$\overrightarrow{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(V_r + \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Sphériques : $\vec{V} = \vec{V}(r,\theta,\varphi)$, $V_r = V_r(r,\theta,\varphi), V_\theta = V_\theta(r,\theta,\varphi), V_\varphi = V_\varphi(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{div}\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V}\left[\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{2}{r}V_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\cos\theta.V_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}\right]$$

Rotationnel d'un vecteur en coordonnées :

Cartésiennes : $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z), V_x = V_x(x,y,z), V_y = V_y(x,y,z), V_z = V_z(x,y,z)$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}\left[\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

Cylindriques : $\vec{V} = \vec{V}(r,\theta,z), V_r = V_r(r,\theta,z), V_\theta = V_\theta(r,\theta,z), V_z = V_z(r,\theta,z)$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left[\frac{\left(\frac{\partial V_z}{\partial \theta} - r\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)}{r}\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{V_\theta + r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}}{r}\overrightarrow{u_z}\right]$$

Sphériques : $\vec{V} = \vec{V}(r,\theta,\varphi), V_r = V_r(r,\theta,\varphi), V_\theta = V_\theta(r,\theta,\varphi), V_\varphi = V_\varphi(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{rot\vec{V}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \left[\frac{r\cos\theta . V_\varphi + r\sin\theta\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta}\right) - r\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi}\right)}{r^2\sin\theta}\overrightarrow{u_r} + \right.$$

$$\left.\frac{\left(\frac{\partial V_r}{\partial \varphi}\right) - \sin\theta V_\varphi - r\sin\theta\left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}\right)}{r\sin\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{V_\theta + r\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) - \left(\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)}{r}\overrightarrow{u_\varphi}\right]$$

Laplacien d'un scalaire en coordonnées :
Cartésiennes : $F = F(x,y,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F) = \vec{\nabla}^2(F) = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right]$$

Cylindriques : $F = F(r,\theta,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F) = \vec{\nabla}^2(F) = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Sphériques : $F = F(r,\theta,\varphi)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}(F) = \vec{\nabla}^2(F) = \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cos\theta.\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

Laplacien d'un vecteur en coordonnées :
Cartésiennes : $\vec{V} = \vec{V}(x,y,z), V_r = V_r(r,\theta,z), V_\theta = V_\theta(r,\theta,z), V_z = V_z(r,\theta,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}^2\left(\vec{V}\right)=\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)\vec{j}+$$
$$\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)\vec{k}$$

Cylindriques : $\vec{V}=\vec{V}(r,\theta,z)$, $V_r=V_r(r,\theta,z), V_\theta=V_\theta(r,\theta,z), V_z=V_z(r,\theta,z)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\vec{V}=\vec{\nabla}^2.\vec{V}=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial^2 z}\right)\vec{u}_r$$
$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial^2 z}\right)\vec{u}_\theta$$
$$+\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial^2\theta}+\frac{\partial^2 V_z}{\partial^2 z}\right)\vec{u}_z$$

Sphériques : $\vec{V}=\vec{V}(r,\theta,\varphi)$, $V_r=V_r(r,\theta,\varphi), V_\theta=V_\theta(r,\theta,\varphi), V_\varphi=V_\varphi(r,\theta,\varphi)$

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\left(\vec{V}\right)=\vec{\nabla}^2(\vec{V})=\left(\frac{2}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\varphi^2}\right)\vec{u}_r$$
$$+\left(\frac{2}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\varphi^2}\right)\vec{u}_\theta$$
$$+\left(\frac{2}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial V_\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\varphi^2}\right)\vec{u}_\varphi$$

Gradient d'un vecteur (matrice 3*3) :

$$\vec{V}=\vec{V}(x,y,z), V_x=V_x(x,y,z), V_y=V_y(x,y,z), V_z=V_z(x,y,z)$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z}\\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z}\\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z}\end{bmatrix}$$

ANNEXE 3
FORMULES DE DERIVATION

1/ Principales règles pour le calcul des dérivées :

Si c est une constante et $u=\varphi(x)$, $v=\psi(x)$ deux fonctions dérivables, alors :

$1/(c)'=0$ $2/(x)'=1$ $3/(u\pm v)'=u'\pm v'$

$4/(cu)'=cu'$ $5/(uv)'=u'v+v'u$ $6/\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-v'u}{v^2}$

$7/\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{-cv}{v^2}$

2/ Table des dérivées des principales fonctions:

$1/(x^n)'=nx^{n-1}$ $2/(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $3/(\sin x)'=\cos x$

$4/\ (\cos x)'=-\sin x$ $5/\ (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $6/\ (\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$

$7/(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ (|x|\prec 1)$ $8/\ (\arccos xx)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \ (|x|\prec 1)$

$9/\ (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$ $10/\ (arc\cot x)'=\frac{-1}{1+x^2}$

$11/\ (a^x)'=a^x\ln x$ $12/\ (e^x)'=e^x$

$13/\ (\ln x)'=\frac{1}{x}\ \ (x\succ 0)$ $14/\ (\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}=\frac{\log_a e}{x}\ \ (x\succ 0, a\succ 0)$

$15/\ (shx)'=chx$ $16/\ (chx)'=shx$

$17/\ (thx)'=\frac{1}{ch^2x}$ $18/\ (cthx)'=\frac{-1}{sh^2x}$

$19/\ (Arshx)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $20/\ (Archx)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ \ (|x|\succ 1)$

$21/\ (Arthx)'=\frac{1}{1-x^2}\ \ (|x|\prec 1)$ $22/\ (Arcthx)'=\frac{-1}{x^2-1}\ \ (|x|\succ 1)$

3/ Règles de dérivation des fonctions composées :

Si $y=f(u)$ et $u=\varphi(x)$ c'est-à-dire $y=f[\varphi(x)]$, telles que y et u sont dérivables, alors :

$y'_x = y'_u u'_x$, ou e utilisant la notation de Leibnitz $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

ANNEXE 4
FORMULES D'INTEGRATION

1/ Principales règles d'intégration :

a/ Si $F^{'}(x)=f(x)$, alors $\int f(x)dx=F(x)+C$ où C est une constante arbitraire.

b/ $\int Af(x)dx=A\int f(x)dx$ où A est une constante.

c/ $\int\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx$

d/ Si $\int f(x)dx=F(x)+C$ et $u=\varphi(x)$, alors $\int f(u)du=F(u)+C$

En particulier, $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$, sachant que $(a\neq 0)$

2/ Table d'intégrales types :

$$I/\ \int x^n dx=\frac{x^{n-1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$$

$$II/\ \int\frac{dx}{x}=\ln|x|$$

$$III/\ \int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C=-\frac{1}{a}\operatorname{arccot}\frac{x}{a}+C\quad(a\neq 0)$$

$$V/\ \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\quad(a\neq 0)$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{a-x}\right|+C\quad(a\neq 0)$$

$$VI/\ \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C\quad(a\neq 0)$$

$$VI/\ \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C=-\arccos\frac{-x}{a}+C\quad(a\succ 0)$$

$$VII/\ \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C\quad(a\succ 0)\ ;\ \int e^x dx=e^x+C$$

$$VIII/\ \int sinxdx=-cosx+C$$

$$IX/\ \int cosxdx=\sin x+C$$

$$XIII/\ \int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\ln|\tan x+\sec x|+C$$

$$XIV/\ \int shxdx=chx+C$$

$$XV/\ \int chxdx=shx+C$$

$$XVI/\ \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$$

$$XVII/\ \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$$

3/ Méthode de substitution

a/ Changement de variable dans une intégrale indéfinie

En posant $x = \varphi(t)$ où t est une nouvelle variable et φ une fonction continue dérivable, on a :

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

On doit veiller à bien choisir la fonction de manière que le deuxième membre de la formule (1) ait une forme commode pour l'intégration.

b/ La substitution trigonométrique :

-Si l'intégrale contient le radical $\sqrt{a^2 - x^2}$, on pose en général $x = a\sin t$, d'où $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$.

- Si l'intégrale contient le radical $\sqrt{x^2 - a^2}$, on pose alors $x = a\sec t$, d'où $\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t$.

-Si l'intégrale contient le radical $\sqrt{x^2 + a^2}$, on pose alors $x = a\tan t$ d'où $\sqrt{a^2 + x^2} = a\sec t$

4/ Intégration par partie

Si $u = \varphi(x)$ et $v = \psi(x)$ sont deux fonctions dérivables, on a :

$$\int udv = uv - \int vdu$$

ANNEXE 5
QUELQUES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Soit l'équation différentielle du second ordre : $\boxed{y''+ay'+by=c}$

a , b et c sont des constantes.

Premier cas : $\boxed{a=0, c=0 \Rightarrow y''+by=0}$

Si $b=0$, la solution est $y=C_1x+C_2$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales.

Si $b \succ 0$, la solution est $y=C_1\sin\sqrt{b}x+C_2\cos\sqrt{b}x$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration..

Si $b \prec 0$, la solution est $y=C_1\exp\left(\sqrt{b}x\right)+C_2\exp\left(-\sqrt{b}x\right)$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Deuxième cas : $\boxed{a\neq 0, c=0 \Rightarrow y''+ay'+by=0}$

L'équation caractéristique est $r^2+ar+b=0$, son déterminant est $\Delta=a^2-4b$, ses deux radicaux sont $_1$ et $_2$:

Si $\Delta \succ 0$, la solution est $y=C_1\exp\left(r_1x\right)+C_2\exp\left(r_2x\right)$:

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Si $\Delta=0$, alors $r_1=r_2=r_0$, la solution est $y=\left(C_1x+C_2\right)\exp\left(r_0x\right)$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Si $\Delta \prec 0$, alors $r_{1,2}$ sont deux nombres imaginaires $r_{1,2}=\alpha+i\beta$, et la solution est $y=\exp\left(\alpha x\right)\left[C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right]$

C_1 et C_2 sont deux constantes d'intégration.

Troisième cas : $\boxed{y''=0, c=0 \Rightarrow ay'+by=0}$

L'équation devient du premier ordre et la solution est $y=C\exp\left(-\frac{b}{a}x\right)$

C est une constante d'intégration déterminées par les conditions initiales.

Quatrième cas :_ $\boxed{y''=0 \Rightarrow ay'+by=c}$

L'équation devient du premier ordre et la solution est $y=C\exp\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}x\right)+\frac{c}{b}$

C est une constante d'intégration déterminées par les conditions initiales.

Quatrième cas :_ $\boxed{y'=0 \Rightarrow y''+by=c}$

La solution est

$$y = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{b}{c}}x\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{b}{c}}x\right) + \frac{c}{b}$$

ANNEXE 6
FORMULAIRE TRIGONOMETRIQUE

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$ $\sin^2\alpha=\dfrac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$	$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$

$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$ $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$ $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$	$\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ $\sin 2a=2\sin a\cos a$ $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$ $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$ $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$	$1+\cos a=2\cos^2\dfrac{a}{2}$ $1-\cos a=2\sin^2\dfrac{a}{2}$ $\sin a=2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}$ $\cos a=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\quad\left(t=\tan\dfrac{a}{2}\right)$ $\sin a=\dfrac{2t}{1+t^2}$ $\tan a=\dfrac{2t}{1-t^2}$

$\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$ $\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$ $\sin a\cos b=\frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$	$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ $\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\sin p-\sin q=2\cos\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$

$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$